Jedan nekomutativni kosmološki model (& more)

Maja Burić

Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

Gravity: new ideas for unsolved problems II

Outline

Formalizam

- motivacija za nekomutativnu gravitaciju i kvantovanje
- razni pristupi: dinamika gravitacionog polja, simetrije, geometrija
- sferno-simetrična rešenja: Schwarzschild, FRW

Formalizam

– pristup koji koristimo je nekomutativni frame formalizam, tj. pokušavamo da opišemo nekomutativnu gravitaciju kao (nekomutativnu) geometriju

– NC prostor = algebra $\mathcal{A}$ generisana koordinatama tj. operatorima x^μ,

$$[x^\mu, x^\nu] = i\hbar\mu^2 J^{\mu\nu}(x)$$

– do metrike se dolazi preko diferencijalne geometrije: osim koordinata definišemo diferencijal d i 1-forme θ^α,

$$df = (e_\alpha f)\,\theta^\alpha = [p_\alpha, f]\,\theta^\alpha$$

uz $[f, \theta^\alpha] = 0$.

Formalizam

– specijalno, $dx^\mu = [p_\alpha, x^\mu]\theta^\alpha = e^\mu_\alpha \theta^\alpha$, pa možemo da odredimo metriku

$$g^{\mu\nu} = e^\mu_\alpha \, e^\nu_\beta \, \eta^{\alpha\beta}$$

– pošto je prostor nekomutativan, da bi algebarska i geometrijska struktura bile dobro definisane i kompatibilne imamo različite uslove. Na primer,

$$i\bar{k}\mu^2 \, dJ^{\mu\nu} = [dx^\mu, x^\nu] + [x^\mu, dx^\nu],$$

naravno i Jacobi,

$$[x^\mu, J^{\nu\rho}] + [x^\rho, J^{\mu\nu}] + [x^\nu, J^{\rho\mu}] = 0$$

Formalizam

– impulsi p_α imaju u formalizmu poseban značaj. Oni mogu a ne moraju da budu unutar prostora $\mathcal{A}$: npr. u kvantnoj mehanici imamo

$$p_\mu = \partial_\mu, \qquad [p_\mu, f] = (\partial_\mu f)$$

– u stvari u komutativnom prostoru impulsi moraju da budu van algebre koordinata, ali u nekomutativnom slučaju mogu da budu i svi u $\mathcal{A}$. Ako su x^μ matrice, izvodi su uvek unutrašnji

– iz kompatibilnosti sledi da je algebra impulsa (najviše) kvadratna,

$$2P^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\, p_\alpha p_\beta - F^\beta{}_{\gamma\delta}\, p_\beta - K_{\beta\gamma} = 0$$

– u vodećem redu po $\hbar$ formalizam je difeomorfizam-invarijantan; lokalna Lorentz-invarijantnost je narušena relacijom $[f, \theta^\alpha] = 0$

– kod 'fuzzy sfere' algebra koordinata data je sa

$$[x^a, x^b] = i\bar{k} C^{ab}{}_c x^c = \frac{i\bar{k}}{r}\epsilon^{abc} x_c$$

a radijus r je definisan Casimir-ovom relacijom $r^2 = (x^a)^2 = \frac{\bar{k}n}{2}$ i konstantan je ukoliko izaberemo IR algebre $so(3)$

– izbor impulsa $i\bar{k} p_a = x_a$ daje $dx^a = \frac{1}{r}\,\epsilon^a{}_{bc} x^b \theta^c$ i metriku sfere

$$g^{ij} = \delta^i_a \delta^j_b \frac{1}{r^2}(r^2 \delta^{ab} - x^b x^a) = \delta^i_a \delta^j_b \pi^{ab}$$

– 'onion' model - 3d prostor u sfernim koordinatama kao suma svih IR, $\mathcal{A}' = \bigoplus_n M_n$. Nema impuls p_r jer je r Casimir-ov operator

– polazimo od opšteg Ansatz-a za algebru impulsa

$$[p_a, p_b] = \frac{i\hbar\mu^2}{2}\epsilon_{abc}(\Pi p_c + p_c\Pi)$$
$$[p_0, p_c] = \frac{i\hbar\mu^2}{2}(\pi_0 p_c + p_c\pi_0)$$
$$[p_4, p_c] = \frac{i\hbar\mu^2}{2}(\pi_4 p_c + p_c\pi_4)$$
$$[p_0, p_4] = i\hbar\mu^2\,\Xi$$
$$[\Xi, p_c] = \frac{i\hbar\mu^2}{2}(\Upsilon p_c + p_c\Upsilon),$$

gde je

$$\Pi = a + bp_0 + cp_4$$
$$\pi_0 = a_0 + b_0 p_0 + c_0 p_4$$
$$\pi_4 = a_4 + b_4 p_0 + c_4 p_4.$$

– Jacobi-jevi identiteti ograničavaju ovu algebru na

$$
\begin{aligned}
[p_a, p_b] &= i\hbar\mu^2\epsilon_{abc}\Pi p_c, \\
[\Pi, p_a] &= 0 \\
[\pi_4, p_a] &= \frac{i\hbar\mu^2}{2}\, c(\pi_4 p_a + p_a\pi_4) \\
[\pi_4, \Pi] &= \frac{i\hbar\mu^2}{2}\, c(\pi_4\Pi + \Pi\pi_4),
\end{aligned}
$$

ili ako uvedemo $\zeta_a = \Pi^{-1}p_a$, na tenzorski proizvod

$$
\begin{aligned}
[\zeta_a, \zeta_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\zeta^c \\
[\Pi, \zeta_a] &= 0 \\
[\pi_4, \zeta_a] &= 0 \\
[\Pi, \pi_4] &= \frac{i\hbar c}{2}(\Pi\pi_4 + \pi_4\Pi)
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\Pi\pi_4 = q\pi_4\Pi, \qquad q = \frac{2+\mu^2 c}{2-\mu^2 c}
$$

– da bismo odredili metriku treba da identifikujemo koordinate. Uzećemo da su to (ζ^a, r, t) uz Ansatz

$$i\hbar\mu^2\Pi = f(r) = \frac{1}{r}\,, \qquad i\hbar\mu^2\pi_4 = G(t)$$

– kompatibilnost ovog Ansatz-a sa algebrom impulsa daje

$$[r,t] = -i\hbar J(t,r) = i\hbar c\mu^2 r\,\frac{G}{\dot{G}}.$$

– iz izraza za $d\zeta^i$, dr i dt možemo da odredimo

$$e^i_c = \frac{1}{r}\,\delta^{ia}\epsilon_{abc}\zeta^b, \qquad e^4_4 = crG, \qquad e^0_a = \frac{c}{r}\frac{G}{\dot{G}}\,\zeta_a \qquad e^0_0 = \frac{c}{r}\frac{G}{\dot{G}}$$

– komponente metrike su

$$
\begin{aligned}
g^{ij} &= e^i_a e^j_b \delta^{ab} = \frac{1}{r^2}(\delta^{ij}\delta^{bd} - \delta^{id}\delta^{jb})\zeta_b\zeta_d = \frac{1}{r^2}\,\delta^i_a\delta^j_b\zeta^2\pi^{ab} \\
g^{44} &= (crG)^2 \\
g^{00} &= -(1-\zeta^2)\left(\frac{c}{r}\frac{G}{\dot{G}}\right)^2 \\
g^{0i} &= i\bar{k}\,\frac{c}{r^2}\frac{G}{\dot{G}}\,\zeta^i.
\end{aligned}
$$

– uvodeći novu promenljivu $\frac{\dot{G}}{G}\,dt = -\lambda d\tau$ u komutativnom limesu imamo

$$
ds^2 = -\frac{\lambda^2 r^2}{c^2(1-\zeta^2)}\,d\tau^2 + \frac{1}{c^2 r^2}e^{2\lambda\tau}\,dr^2 + r^2 d\Omega
$$

– skalarna krivina je data sa $R = \dfrac{2(1+c^2-c^2\zeta^2)}{r^2} - 12c^2 e^{-2\lambda\tau}$

– Ansatz za koordinate može da se uopšti, ali kad se reši svede se na smenu promenljivih r i τ: dobijena geometrija je, u okviru postavljenih graničnih uslova, jedinstvena

– dobijeno kosmološko rešenje je izotropno ali nije homogeno

– r i t imaju kontinualne spektre: spektar od r je poluprava a od t prava. ζ^a imaju diskretan spektar

– prostor nije statički jer smo se ograničili na slučaj kad su svi impulsi unutar $\mathcal{A}$

– da bismo dobili statičko rešenje menjamo pristup: polazimo od algebre koordinata i statičkog Ansatz-a za frame, impulse ćemo analizirati naknadno

– ovakav pristup je u neku ruku prirodniji, medjutim je deo problema postaju početni uslovi tj. prostor u kome se traži skup rešenja.

– cilj je da 'minimalno' povećamo algebru koordinata tako da dobijemo željeno 'fizičko' rešenje; ali oba ova pojma su u neku ruku proizvoljna

– pretpostavljamo da je skup koordinata (x^a, r, t); označavamo $\rho^2 = (x^a)^2$ i tretiramo i ρ kao varijablu. Ansatz za komutatore:

$$[x^a, x^b] = i\bar{k}\mu L\rho^{-1}\,\epsilon^{abc}x_c \qquad [x^a, r] = i\bar{k}\mu J_4 x^a$$

$$[x^a, t] = i\bar{k}\mu J_0 x^a \qquad [t, r] = i\bar{k}J$$

gde su $J = J(\rho, r, t)$, $J_0 = J_0(\rho, r, t)$, $J_4 = J_4(\rho, r, t)$

– Jacobi-jevi identiteti daju jednačine

$$x_a[L,x^a]=0 \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\partial L}{\partial r}J_4+\frac{\partial L}{\partial t}J_0=0$$

$$\mu(2L-\rho\frac{\partial L}{\partial\rho})J_0-\frac{\partial L}{\partial r}J=0$$

$$\mu(2L-\rho\frac{\partial L}{\partial\rho})J_4-\frac{\partial L}{\partial t}J=0$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}J_4+\frac{\partial J}{\partial t}J_0-\frac{\partial J_4}{\partial r}J-\frac{\partial J_0}{\partial t}J-\mu\rho\frac{\partial J_4}{\partial\rho}J_0+\mu\rho\frac{\partial J_0}{\partial\rho}J_4=0$$

– najjednostavnije rešenje, ako pretpostavimo da nijedna funkcija ne zavisi od vremena, je

$$L=\rho^2, \qquad J_4=0$$

Statička rešenja

– frame Ansatz je

$$\theta^a = -h\rho^{-1}\epsilon^{abc}x_b dx_c + \frac{1}{\rho^2}x_b\theta^b x^a, \qquad dx^a = \frac{1}{h\rho}\epsilon^{abc}x_b\theta_c,$$
$$\theta^4 = g dr, \qquad dr = g^{-1}\theta^4,$$
$$\theta^0 = f dt, \qquad dt = f^{-1}\theta^0.$$

– njegova kompatibilnost sa komutatorima daje jednačine

$$\frac{\partial J_0}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}(gJ) = 0, \qquad -\frac{\partial h}{\partial r}J = (h + \rho\frac{\partial h}{\partial \rho})J_0,$$
$$d(L\rho^{-1}) = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

– dodatna jednačina koja sledi iz definicije spoljašnjeg proizvoda 1-formi

$$\left(f' f^{-1} J\right)' f g^{-1} = \mathrm{const.}$$

– jednačine se mogu pojednostaviti izborom radijalne koordinate, pošto je formalizam invarijantan na difeomorfizme.

– prvi slučaj: koordinata $\bar{r}$, $g(\bar{r}) = 1$

– jednačine daju

$$J = \mathrm{const}, \quad h(\bar{r}) = \rho^k e^{l\bar{r}}, \quad f(\bar{r}) = \cosh^2(\Lambda\bar{r})$$

– klasični limes

$$ds^2 = -\cosh^4(\sqrt{\Lambda}\bar{r})dt^2 + d\bar{r}^2 + \rho^{2k}e^{2l\bar{r}}d\Omega$$

– krivina $\quad R = -8\Lambda - 6l^2 - 8\sqrt{\Lambda}\tanh(\sqrt{\Lambda}\bar{r}) + 4\Lambda\cosh^{-2}(\sqrt{\Lambda}\bar{r})$

Statička rešenja

– drugi slučaj: koordinata r, $h(r,\rho) = C(\rho)\, r$

– jednačine daju

$$J = (C + \rho\frac{dC}{d\rho})J_0 r, \quad g = \frac{1}{\mu r}$$

u najjednostavnijem slučaju, ili opštije,

$$g = \frac{e^{a\rho}}{r^{1-a\rho}} - \frac{ab\rho}{1-a\rho}$$

– rešavanje jednačine za f je komplikovano, ali se u najjednostavnijem slučaju u klasičnom limesu dobija

$$ds^2 = -\frac{1}{16}\frac{(r^2+1)^4}{r^4}dt^2 + \frac{1}{r^2} + r^2 d\Omega$$

– i krivina $\quad R = -\dfrac{2}{r^2(1+r^2)^2}\left(-1 + r^2 + 5r^4 + 11r^6\right)$

– navedena dva rešenja su ista do na smenu promenljivih, ali postoje i opštija rešenja koja imaju netrivijalnu zavisnost od ρ i podsećaju na razvoj po multipolima

– dobijeno rešenje je statičko ali nije Schwarzschild; u asimptotskoj oblasti je de Sitter

– r i t imaju i ovde kontinualne spektre, x^a diskretne

– može se pokazati da je impuls p_0 van $\mathcal{A}$: početna algebra je proširena jednim generatorom