Т-дуалност у слабо закривљеном простор-времену

Љубица Давидовић, Бојан Николић и Бранислав Саздовић

Институт за физику
Универзитет у Београду, Србија
www.ipb.ac.rs

Дивчибаре
септембар 2013

Садржај

Струна у слабо закривљеном простор-времену

- Дејство за затворену струну са конформним градијентним условом $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \ \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}[x] \partial_- x^\nu, \quad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$$

- Позадинска поља: метрички тензор $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ и Калб-Рамондово поље $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$

$$\Pi_{\pm\mu\nu}[x] = B_{\mu\nu}[x] \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}[x]$$

- Просторно-временске једначине кретања

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_\nu{}^{\rho\sigma} = 0, \quad D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0$$

- Слабо закривљено простор-време

$$G_{\mu\nu}[x] = const, \ B_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho, \quad b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = const$$

Уопштена Бушерова процедура

- Локализовати глобалну симетрију $\delta x^\mu = \lambda^\mu = const$
- Увести градијентна поља v_α^μ
- Заменити обичне изводе коваријантним изводима

$$\partial_\alpha x^\mu \to D_\alpha x^\mu = \partial_\alpha x^\mu + v_\alpha^\mu$$

- Наметнути закон трансформације градијентним пољима

$$\delta v_\alpha^\mu = -\partial_\alpha \lambda^\mu, \quad (\lambda^\mu = \lambda^\mu(\tau, \sigma))$$

- Заменити координату x^μ инваријантном координатом

$$\Delta x_{inv}^\mu \equiv \int_P d\xi^\alpha D_\alpha x^\mu = x^\mu - x^\mu(\xi_0) + \Delta V^\mu,$$

где је

$$\Delta V^\mu \equiv \int_P d\xi^\alpha v_\alpha^\mu$$

Уопштена Бушерова процедура

- Захтевати еквивалентност са почетном теоријом
- Јачина градијентних поља

$$F^{\mu}_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha v^{\mu}_{\beta} - \partial_\beta v^{\mu}_{\alpha}$$

  мора бити нулта
- Додати члан са Лагранжевим множитељем y_μ у Лагранжијан
- Градијентно инваријантно дејство

$$S_{inv} = \kappa \int d^2\xi \Big[D_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}[\Delta x_{inv}] D_- x^\nu + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big]$$

- Фиксирати градијентни услов $x^\mu(\xi) = x^\mu(\xi_0)$
- Дејство са фиксираним градијентним условом

$$S_{fix}[y, v_\pm] = \kappa \int d^2\xi \Big[v^\mu_+ \Pi_{+\mu\nu}[\Delta V] v^\nu_- + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big]$$

Једначине кретања за дејство са фиксираним градијентним условом

- Коначни део

$$\Pi_{0+\mu\nu}v_-^{(0)\nu} + \frac{1}{2}\partial_- y_\mu^{(0)} = 0$$

$$\Pi_{0-\mu\nu}v_+^{(0)\nu} + \frac{1}{2}\partial_+ y_\mu^{(0)} = 0$$

$$\partial_+ v_-^{(0)\mu} - \partial_- v_+^{(0)\mu} = 0$$

- Бесконачно мали део

$$h_{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}]v_-^{(0)\nu} + \Pi_{0+\mu\nu}v_-^{(1)\nu} + \frac{1}{2}\partial_- y_\mu^{(1)} = \beta_\mu^+[V^{(0)}]$$

$$h_{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}]v_+^{(0)\nu} + \Pi_{0-\mu\nu}v_+^{(1)\nu} + \frac{1}{2}\partial_+ y_\mu^{(1)} = -\beta_\mu^-[V^{(0)}]$$

$$\partial_+ v_-^{(1)\mu} - \partial_- v_+^{(1)\mu} = 0, \qquad \beta_\mu^\pm[x] = \mp\frac{1}{2}h_{\mu\nu}[x]\partial_\mp x^\nu.$$

Повратак на полазну теорију

- Решење једначине кретања $v_{\pm}^{\mu} = \partial_{\pm} x^{\mu}$
- Аргумент позадинских поља

$$\Delta V^{\mu}(\xi) = \int_{P} d\xi^{\alpha} v_{\alpha}^{\mu} = x^{\mu}(\xi) - x^{\mu}(\xi_0)$$

- Једначина кретања

$$\partial_{+}\Big[\Pi_{+\mu\nu}[\Delta x^{(0)}]\partial_{-}x^{\nu} - \beta_{\mu}^{+}[x^{(0)}]\Big] - \partial_{-}\Big[\Pi_{-\mu\nu}[\Delta x^{(0)}]\partial_{+}x^{\nu} + \beta_{\mu}^{-}[x^{(0)}]\Big] = 0$$

- Дејство

$$S_{fix}[v_{\pm} = \partial_{\pm} x] = \kappa \int d^2\xi \; \partial_{+}x^{\mu}\Pi_{+\mu\nu}[x]\partial_{-}x^{\nu}$$

Т-дуално дејство

- Решење једначине кретања

$$v^\mu_\pm[y] = -\kappa\,\Theta^{\mu\nu}_\pm[\Delta V^{(0)}]\partial_\pm y_\nu \mp 2\kappa\Theta^{\mu\nu}_{0\pm}\beta^\mp_\nu[V^{(0)}]$$

$$\Theta^{\mu\nu}_\pm[x] = -\frac{2}{\kappa}\left(G_E^{-1}[x]\Pi_\pm[x]G^{-1}\right)^{\mu\nu}$$

- Једначина кретања Т-дуалне теорије

$$\partial_+\left[\Theta^{\mu\nu}_-[\Delta V^{(0)}]\partial_- y_\nu - 2\Theta^{\mu\nu}_{0-}\beta^+_\nu[V^{(0)}]\right]$$
$$-\partial_-\left[\Theta^{\mu\nu}_+[\Delta V^{(0)}]\partial_+ y_\nu + 2\Theta^{\mu\nu}_{0+}\beta^-_\nu[V^{(0)}]\right] = 0$$

- Т-дуално дејство

$${}^\star S[y,\Delta\tilde{y}] = \frac{\kappa^2}{2}\int d\xi^2\partial_+ y_\mu\Theta^{\mu\nu}_-[\Delta V^{(0)}]\partial_- y_\nu,$$

где је $\Delta V^{(0)\mu} = -\kappa\,\theta^{\mu\nu}_0\Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_\nu$ и
$\Delta y_\nu = \int_P(d\tau\dot{y} + d\sigma y'),\quad \Delta\tilde{y} \equiv \int_P(d\tau y' + d\sigma\dot{y}).$

T_0-дуалност

- простор-време Минковског $G_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} \to 0$
- решење једначина кретања $v_{\pm}^{(0)\mu} = \pm\eta^{\mu\nu}\partial_{\pm}y_{\nu}$
- T_0-дуално дејство

$$^{\star}S[y] = \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\ \eta^{\mu\nu}\partial_{+}y_{\mu}\partial_{-}y_{\nu}$$

- линијски интеграл градијентних поља $\Delta V^{(0)\mu} = \eta^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_{\nu}$
- Т-дуална координата

$$\Delta\tilde{y}_{\mu} \equiv \int_P d\xi^{\alpha}\varepsilon^{\beta}{}_{\alpha}\partial_{\beta}y^{\mu} = \int_P (d\tau y'_{\mu} + d\sigma\dot{y}_{\mu}) = \tilde{y}_{\mu}(\xi) - \tilde{y}_{\mu}(\xi_0)$$

- T_0-дуална једначина кретања $\partial_{+}\partial_{-}y_{\mu} = 0$ има решење $y_{\mu} = y_{+\mu}(\xi^{+}) + y_{-\mu}(\xi^{-})$
- T_0-дуална координата постаје $\tilde{y}_{\mu} = y_{+\mu}(\xi^{+}) - y_{-\mu}(\xi^{-})$ што је познати облик за Т-дуалну координату у тривијалном простор-времену

T_1-дуалност

- равно простор-време $\quad G_{\mu\nu}[x] \to G_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}[x] \to b_{\mu\nu}$
- полазна, ефективна и Т-дуална позадинска поља
$$\Pi_{\pm\mu\nu}[x] \to \Pi_{0\pm\mu\nu} \equiv b_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}G_{\mu\nu}$$
$$G^E_{\mu\nu}[x] \to g_{\mu\nu} \equiv [G - 4bG^{-1}b]_{\mu\nu}$$
$$\theta^{\mu\nu}[x] \to \theta_0^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}[g^{-1}bG^{-1}]^{\mu\nu}$$
$$\Theta_\pm^{\mu\nu}[x] \to \Theta_{0\pm}^{\mu\nu} \equiv \theta_0^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(g^{-1})^{\mu\nu}$$
- решење једначина кретања $v_\pm^{(1)\mu} = -\kappa\,\Theta_{0\pm}^{\mu\nu}\partial_\pm y_\nu$
- T_1-дуално дејство
$$S[y] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\ \partial_+ y_\mu \Theta_{0-}^{\mu\nu}\partial_- y_\nu$$
- линијски интеграл $\Delta V^{(1)\mu} = V^{(1)\mu}(\xi) - V^{(1)\mu}(\xi_0)$
$V^{(1)\mu}(\xi) = -\kappa\theta_0^{\mu\nu}y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu}\tilde{y}_\nu = (g^{-1})^{\mu\nu}[(2bG^{-1})_\nu{}^\rho y_\rho + \tilde{y}_\nu]$

Т-дуалне трансформације у слабо закривљеном простор-времену

- Упоређивање дејстава

$$\partial_\pm x^\mu \to \partial_\pm y_\mu, \qquad \Pi_{+\mu\nu}[x] \to \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{\mu\nu}[\Delta V]$$

- Т-дуална позадинска поља

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\to {}^\star G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V] \\ B_{\mu\nu}[x] &\to {}^\star B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu}[\Delta V] \\ \Delta V^\mu[y] &= -\kappa\theta_0^{\mu\nu}\Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_\nu \end{aligned}$$

- Упоређивање израза за градијентна поља

$$\partial_\pm x^\mu \cong -\kappa\,\Theta_\pm^{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}]\partial_\pm y_\nu \mp 2\kappa\Theta_{0\pm}^{\mu\nu}\beta_\nu^\mp[V^{(0)}]$$

Т-дуализација Т-дуалног дејства

- Дејство са фиксираним градијентним условом

$$^{\star}S_{fix}[z,u_\pm] = \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi \Big[\kappa u_{+\mu}\Theta_-^{\mu\nu}\big[\Delta V[U]\big]u_{-\nu} + u_{+\mu}\partial_- z^\mu - u_{-\mu}\partial_+ z^\mu\Big]$$

- Решење једначине кретања
  $u_{\pm\mu} = -2\Pi_{\mp\mu\nu}[\Delta z^{(0)}]\partial_\pm z^{(0)\nu} \mp 2\beta^\mp_\mu[z^{(0)}]$
- Једначина кретања за Лагранжев множитељ

$$\partial_+\Big[\Pi_{+\mu\nu}[\Delta z^{(0)}]\partial_- z^\nu - \beta^+_\mu[z^{(0)}]\Big] - \partial_-\Big[\Pi_{-\mu\nu}[\Delta z^{(0)}]\partial_+ z^\nu + \beta^-_\mu[z^{(0)}]\Big] = 0$$

  или $\partial_+\partial_- z^\mu - B^\mu{}_{\nu\rho}\partial_+ z^\nu \partial_- z^\rho = 0.$
- Закон трансформације координата
  $\partial_\pm y_\mu \cong -2\Pi_{\mp\mu\nu}[\Delta z]\partial_\pm z^\nu \mp 2\beta^\mp_\mu[z]$

Парцијална Т-дуализација

- Локализовати глобалну симетрију за неке координате

$$\delta x^a = \lambda^a(\tau,\sigma), \quad a = d+1, ..., D$$

- Парцијално Т-дуализовано дејство

$$\begin{aligned} S_\pi[x^i, y_a] &= \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \bar{\Pi}_{+ij}[x^i, \Delta V^a] \partial_- x^j \\ &+ \frac{\kappa}{2} \partial_+ y_a \bar{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a] \partial_- y_b \\ &- \kappa \, \partial_+ x^i \Pi_{+ia}[x^i, \Delta V^a] \bar{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a] \partial_- y_b \\ &+ \kappa \, \partial_+ y_a \bar{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a] \Pi_{+bi}[x^i, \Delta V^a] \partial_- x^i \Big] \end{aligned}$$

где је $\bar{\Pi}_{+ij} \equiv \Pi_{+ij} - 2\kappa \Pi_{+ia} \bar{\Theta}_-^{ab} \Pi_{+bj}$ и
$\bar{\Theta}_{0\pm}^{ab} \equiv -\frac{2}{\kappa}(\bar{g}^{-1})^{ac} \Pi_{0\pm cd} (\bar{G}^{-1})^{db} = \bar{\theta}_0^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\bar{g}^{-1})^{ab}$, при чему
је $\bar{G}_{ab} = G_{ab}$ и $\bar{g}_{ab} = \bar{G}_{ab} - 4b_{ac}(\bar{G}^{-1})^{cd} b_{db}$.

Некомутативност

- Поасонове заграде

$$\{x^\mu(\sigma), x^\nu(\bar\sigma)\} = 0$$
$$\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar\sigma)\} = \delta^\mu_\nu \delta(\sigma - \bar\sigma)$$
$$\{\pi_\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar\sigma)\} = 0$$

- Комутативне координате се трансформишу у некомутативне координате

$$\{Ty_\mu(\sigma), Ty_\nu(\bar\sigma)\} = -\frac{1}{\kappa} B_{\mu\nu\rho}\big[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar\sigma)\big]\theta(\sigma - \bar\sigma)$$

$$\begin{aligned}\{Tx^\mu(\sigma), Tx^\nu(\bar\sigma)\} \;=\; & -\Big[\frac{1}{\kappa} R^{\mu\nu\rho}\Big(y_\rho(\sigma) - y_\rho(\bar\sigma)\Big) \\ & - \frac{1}{\kappa}\Big(\tilde R^{\mu\nu\rho} - 4\tilde Q^{\mu\nu\rho}\Big)\Big(\tilde y_\rho(\sigma) - \tilde y_\rho(\bar\sigma)\Big)\Big]\theta(\sigma - \bar\sigma)\end{aligned}$$

Циљеви

- Разумети структуру релација некомутативности потпуно Т-дуализоване теорије
- Наћи релације некомутативности за произвољан сигма модел у ланцу Т-дуалних теорија
- Наћи везу између ових структура