Nekomutativnost zatvorene bozonske strune

Ljubica Davidović, Bojan Nikolić i
Branislav Sazdović

Institut za fiziku, Univerzitet u Beogradu, Srbija

Nove ideje za nerešene probleme, 19.-22.09.2013, Divčibare, Srbija

Plan izlaganja

1. Nekomutativnost otvorene strune
2. T-dualnost
3. Koordinatno zavisna pozadinska polja
4. Nekomutativnost zatvorene strune

Nekomutativnost otvorene strune

- Prostor-vreme sa aspekta dimenzionih objekata (npr. struna) izgleda drugačije nego u slučaju tačkaste čestice.
- Krajevi otvorene strune zakačeni za *Dp*-branu postaju nekomutativni u prisustvu konstantnog Kalb-Ramond-ovog polja $B_{\mu\nu}$.
- Princip minimuma dejstva $\delta S = 0$

$$S(x) = \kappa \int_{\Sigma} \left(\frac{\eta^{\alpha\beta}}{2} G_{\mu\nu} + \varepsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}\right) \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \,,$$

daje jednačine kretanja i granične uslove.

Nekomutativnost otvorene strune

- Rešenje graničnih uslova ima oblik

$$x^\mu = q^\mu - \Theta^{\mu\nu} \int^\sigma d\sigma_1 p_\nu(\sigma_1)\,,$$

  gde su q^μ i p_ν efektivne promenljive koje zadovoljavaju $\{q^\mu(\sigma), p_\nu(\bar\sigma)\} = 2\delta^\mu{}_\nu \delta_s(\sigma, \bar\sigma)$.
- Koordinata x^μ je linearna kombinacija efektivne koordinate q^μ i efektivnog impulsa p_ν, koji proizvodi nekomutativnost koordinata

$$\{x^\mu(0), x^\nu(0)\} = -2\Theta^{\mu\nu}\,, \quad \{x^\mu(\pi), x^\nu(\pi)\} = 2\Theta^{\mu\nu}\,.$$

Nekomutativnost otvorene strune

- Efektivno dejstvo je oblika

$$S(q) = S(x)|_{\text{gr.uslovi}} = \kappa \int d^2\xi \frac{1}{2} G^E_{\mu\nu} \partial_+ x^\mu \partial_- x^\nu \ ,$$

gde su

$$G^E_{\mu\nu} = (G - 4BG^{-1}B)_{\mu\nu} \, , \quad \Theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}BG^{-1})^{\mu\nu} \, ,$$

efektivna metrika i parametar nekomutativnosti, respektivno.

T-dualnost zatvorene strune

- Povezuje fizički ekvivalentne teorije sa različitim pozadinskim poljima.
- Kompaktifikacija na krugu ima dve posledice:
  - impuls postaje kvantovan - $p = \frac{n}{R}\,(n \in Z)$,
  - pojavljuju se nova stanja (namotaji N)

$$x(2\pi) - x(0) = 2\pi RN\,.$$

- Kvadrat mase bilo kog stanja

$$M^2 = \frac{n^2}{R} + m^2\frac{R^2}{\alpha'^2} + \text{oscilatorne mode}\,,$$

je invarijantan na zamenu $n \leftrightarrow m$ i $R \leftrightarrow {}^\star R \equiv \alpha'/R$.

T-dualnost zatvorene strune

- Kompaktifikacija na krugu poluprečnika R je ekvivalentna kompaktifikaciji na krugu poluprečnika ${}^\star R$.
- Dualno dejstvo ${}^\star S$ ima isti oblik kao i inicijalno dejstvo ali sa promenjenim pozadinskim poljima

$$ {}^\star G^{\mu\nu} \sim (G_E^{-1})^{\mu\nu} \, , \quad {}^\star B^{\mu\nu} \sim \Theta^{\mu\nu} \, . $$

Izbor pozadinskih polja

- $G_{\mu\nu}$ je konstantno i $B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} H_{\mu\nu\rho} x^\rho \equiv b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$.
- $b_{\mu\nu}$ i $H_{\mu\nu\rho}$ su konstantni i $H_{\mu\nu\rho}$ je beskonačno mala veličina.
- Pozadinska polja zadovoljavaju prostorno-vremenske jednačine polja. Ricci tenzor $R_{\mu\nu}$ je proporcionalan $H^2_{\mu\nu}$, pa je u linearnoj aproksimaciji po $H_{\mu\nu\rho}$ prostor-vreme ravno.

T-dualizacija svih koordinata

- Generalizovana Buscher-ova procedura sastoji se iz dva koraka:
  - lokalizacije globalne simetrije $\delta x^\mu = \lambda^\mu$ koja je simetrija i u slučaju kada je $B_{\mu\nu}$ koordinatno zavisno

$$\partial_\alpha x^\mu \to D_\alpha x^\mu = \partial_\alpha x^\mu + v^\mu_\alpha \,,$$

  - $x^\mu \to \Delta x^\mu_{inv} = \int_P d\xi^\alpha D_\alpha x^\mu$ (ovo je novi korak).

T-dualno dejstvo

- $x^\mu \to V^\mu = -\kappa\Theta_0^{\mu\nu} y_\nu + (g_E^{-1})^{\mu\nu}\tilde{y}_\nu \quad [x^\mu \to (y_\mu, \tilde{y}_\mu)]$.
- ${}^\star G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu}(\Delta V)$ i ${}^\star B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\Theta^{\mu\nu}(\Delta V)$.
- T-dualno dejstvo je oblika

$$ {}^\star S = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}(\Delta V)\partial_- y_\nu \, , $$

gde su

$$ \Theta_\pm^{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\kappa}\left(G_E^{-1}(x)\Pi_\pm(x)G^{-1}\right)^{\mu\nu} \, , \quad \Pi_{\pm\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x) \pm \frac{1}{2}G_{\mu\nu} \, . $$

Transformacije T-dualnosti

$$\partial_\pm x^\mu = -\kappa\Theta_\pm^{\mu\nu}(\Delta V)\partial_\pm y_\nu \mp 2\kappa\Theta_{0\pm}^{\mu\nu}\beta_\nu^\mp(V)\,,$$

$$\partial_\pm y_\mu = -2\Pi_{\mp\mu\nu}(\Delta x)\partial_\pm x^\nu \mp \beta_\mu^\mp(x)\,,$$

gde je

$$\beta_\mu^\pm(x) = \mp\frac{1}{6}H_{\mu\rho\sigma}\partial_\mp x^\rho x^\sigma\,.$$

Ova funkcija je beskonačno mala i bilinearna po x^μ. Izraz za $\beta_\mu^\pm$ dolazi iz člana u dejstvu

$$\int d^2\xi v_+^\mu B_{\mu\nu}(\delta V)v_-^\nu = \int d^2\xi \beta_\mu^\alpha(V)\delta v_\alpha^\mu\,.$$

Transformacije T-dualnosti u kanonskom obliku

$$x'^{\mu} = \frac{1}{\kappa}{}^{\star}\pi^{\mu} - \kappa\Theta_0^{\mu\nu}\beta^0_{\nu}(V) - (g_E^{-1})^{\mu\nu}\beta^1_{\nu}(V)$$

$$y'_{\mu} = \frac{1}{\kappa}\pi_{\mu} - \beta^0_{\mu}(x)\,.$$

Beskonačno mali članovi (koji sadrže β^{α}_{μ}) su popravke u odnosu na slučaj sa konstantnim pozadinskim poljima. Ovi čalnovi su izvor nekomutativnosti. Transformacioni zakoni za $\dot{y}_{\mu}$ i $\dot{x}^{\mu}$ se korišćenjem izraza za impulse π_{μ} i ${}^{\star}\pi^{\mu}$ prevode u transformacione zakone za x'^{μ} i y'_{μ}.

Način računanja Poisson-ovih zagrada

$$\Delta X^\mu(\sigma,\sigma_0)=\int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma_1 X'^\mu(\sigma_1)\,,\quad \Delta Y_\mu(\sigma,\sigma_0)=\int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma_1 Y'_\mu(\sigma_1)\,.$$

Iz

$$\{X'_\mu(\sigma),Y'_\nu(\bar\sigma)\}\cong K'_{\mu\nu}(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma)+L_{\mu\nu}(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma),$$

dobijamo

$$\{X_\mu(\tau,\sigma),Y_\nu(\tau,\bar\sigma)\}\cong-\left[K_{\mu\nu}(\sigma)-K_{\mu\nu}(\bar\sigma)+L_{\mu\nu}(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma-\bar\sigma)\,.$$

Uzimajući $\sigma\to 2\pi+\sigma$ i $\bar\sigma\to\sigma$ dobijamo

$$\{X_\mu(2\pi+\sigma),Y_\nu(\sigma)\}=-\left[K_{\mu\nu}(2\pi+\sigma)-K_{\mu\nu}(\sigma)+L_{\mu\nu}(\sigma)\right]\,.$$

Otkud nekomutativnost?

Izračunavanje Poisson-ovih zagrada koordinata se svodi na računanje Poisson-ovih zagrada σ izvoda koordinata. σ izvodi koordinata su dati T-dualnim transformacijama (u kanonskom obliku). Pošto su T-dualne transformacije za datu koordinatu linearna kombinacija koordinata i kanonski konjugovanih impulsa iz T-dualnog prostora, dobijamo nekomutativnost koordinata (slično kao i u slučaju otvorene strune). Za konstantna pozadinska polja zakoni T-dualne transformacije su oblika

$$\pi_\mu \cong \kappa y'_\mu \,, \quad {}^\star\pi^\mu \cong \kappa x'^\mu \,.$$

Odatle sledi da nema nekomutativnosti

$$\{\pi_\mu, \pi_\nu\} = 0 \Longrightarrow \{y_\mu, y_\nu\} = 0 \,.$$

Fluksevi i veličina $\tilde{y}_\mu$

- ${}^\star B^{\mu\nu}$ zavisi od $\Delta V^\mu(y, \tilde{y})$

$$ {}^\star B^{\mu\nu} = {}^\star b^{\mu\nu} + Q_\rho^{\mu\nu} \Delta V^\rho \,. $$

- Veličina $\Gamma^E_{\mu,\nu\rho}$ je Kristofelov simbol za $G^E_{\mu\nu}$.
- Po definiciji $\tilde{y}'_\mu = \dot{y}_\mu$.

Rezultati

$$\{y_\mu(\sigma+2\pi), y_\nu(\sigma)\} \cong -\frac{2\pi}{\kappa} B_{\mu\nu\rho} N^\rho .$$

$$\begin{aligned} & \{y_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} + \{y_\mu(\sigma), \tilde{y}_\nu(\sigma+2\pi)\} \\ \cong \quad & -\frac{4\pi}{\kappa^2} B_{\mu\nu\rho} p^\rho + \frac{\pi}{\kappa}\left(3\Gamma^E_{\rho,\mu\nu} - 8B_{\mu\nu\lambda} b^\lambda{}_\rho\right) N^\rho , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{y}_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} \cong \frac{2\pi}{\kappa}\left[-B_{\mu\nu\rho} - 6 g_{\mu\alpha} Q^{\alpha\beta}{}_\rho g_{\beta\nu}\right] N^\rho \\ + \quad \frac{2\pi}{\kappa}\left[2B_{\mu\nu}{}^\lambda g_{\lambda\rho} + 3\left(\Gamma^E_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma^E_{\nu,\mu\lambda}\right) b^\lambda{}_\rho\right] N^\rho \\ + \quad \frac{\pi}{\kappa^2}\left[3\left(\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^E_{\nu,\mu\rho}\right) p^\rho - 8B_{\mu\nu\lambda} b^\lambda{}_\rho\right] p^\rho . \end{aligned}$$

Definicije

Broj namotaja N^μ i impuls centra mase strune p_μ su definisani kao

$$N^\mu = \frac{1}{2\pi}\left[x^\mu(\sigma + 2\pi) - x^\mu(\sigma)\right] ,$$

$$p_\mu = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^{\sigma+2\pi} d\eta \pi_\mu(\eta) .$$

Dalja istraživanja - razvoj u modove

Za koordinatno zavisna pozadinska polja granični uslov nije automatski zadovoljen. Dobija se

$$\gamma_\mu(2\pi) - \gamma_\mu(0) = 0$$

gde je

$$\gamma_\mu = \kappa \left[-G_{\mu\nu} x'^\nu + B_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\nu \right] .$$

Razvojem u Furijeov red i korišćenjem graničnog uslova dobili smo iste rezultate kao i kanonskom metodom.